

Tilburg University

Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van grafentheorie (Deel V)

Derks, W.

Publication date:
1976

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in Tilburg University Research Portal](#)

Citation for published version (APA):

Derks, W. (1976). *Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van grafentheorie (Deel V): De graaf van dynamische modellen met meerdere vertragingen*. (pp. 41). (FEW Ter Discussie). Faculteit der Economische Wetenschappen.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

252
CBM
R
63/
7627
1976
37



KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG

REEKS "TER DISCUSSIE"

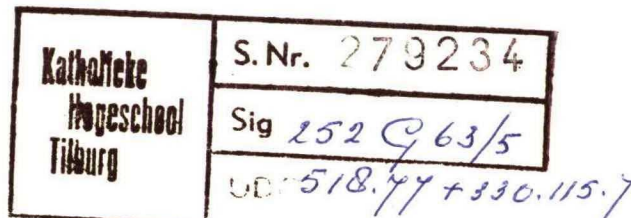
R11
T graphs
T dynamic models



KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG

REEKS "TER DISCUSSIE"

Voorlopig verslag van gedeelte van onderzoek,
dat onder leiding staat van
Prof. Dr. J.J.J. Dalmulder en dat gesubsidieerd
is door de Nederlandse Organisatie voor Zuiver-
Wetenschappelijk Onderzoek, Z.W.O.



No. 76.037

november 1976

Structuuranalyse van Econometrische Modellen
met behulp van Grafentheorie.

Deel V.

De graaf van dynamische modellen met meerdere
vertragingen.

Drs. W. Derks.

FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN

Inhoud.

Inleiding.

1

V.1. Het dynamisch model met meerdere vertragingen,
zonder exogene variabelen.

2

V.2. Het dynamisch model met meerdere vertragingen,
met exogene variabelen.

27

Literatuur.

41

Inleiding.

In Deel III en Deel IV van deze studie^{*}) is de werking van dynamische modellen met één vertraging geanalyseerd.

In Deel V wordt de werking van dynamische modellen met meerdere vertragingen geanalyseerd.

Verwijzingen van de vorm (I . .), (II . .), (III . .) en (IV . .) hebben betrekking op respectievelijk Deel I [2], Deel II [3], Deel III [4] en Deel IV [5].

^{*}) Zie: [4] en [5].

V.1. Het dynamisch model met meerdere vertragingen, zonder exogene variabelen.

We beschouwen een dynamisch model met meerdere vertragingen zoals in (III.1.7):

$$y = A y + C_1 y_{-1} + C_2 y_{-2} + \dots + C_r y_{-r} \quad (V.1.1)$$

De gereduceerde vorm van (V.1.1) is gelijk aan:

$$y = [I-A]^{-1} C_1 y_{-1} + [I-A]^{-1} C_2 y_{-2} + \dots + [I-A]^{-1} C_r y_{-r} \quad (V.1.2)$$

De waarde van de endogene variabelen in periode nul en in de (r-1) voorafgaande perioden wordt als gegeven beschouwd. We gaan nu onderzoeken wat de totale invloed is van $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots$ op de endogene variabelen in de toekomst.

Uit (V.1.1) volgt dat:

$$y_{+1} = A y_{+1} + C_1 y_0 + C_2 y_{-1} + \dots + C_r y_{-r+1} \quad (V.1.3)$$

Uit (V.1.3) en (V.1.2) volgt dat:

$$y_{+1} = [I-A]^{-1} C_1 y_0 + [I-A]^{-1} C_2 y_{-1} + \dots + [I-A]^{-1} C_r y_{-r+1} \quad (V.1.4)$$

De totale invloed van y_0 op y_{+1} is volgens (V.1.4) gelijk aan:

$$T_{(y_0, y_{+1})} = [I-A]^{-1} C_1 \quad (V.1.5)$$

(V.1.5) is gelijk aan de totale invloed van y_0 op y_{+1} bij een model met één vertraging, zoals in (III.4.5) en (III.6.6).

Uit (V.1.4) volgt dat:

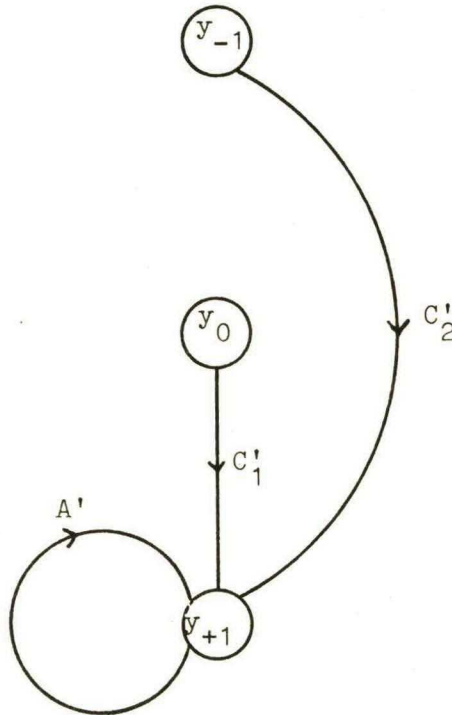
$$T_{(y_{-k}, y_{+1})} = [I-A]^{-1} C_{k+1} \quad \text{voor } 0 \leq k \leq r-1 \quad (V.1.6)$$

$$T(y_{-k}, y_{+1}) = 0 \quad \text{voor } k > r-1 \quad (V.1.7)$$

(V.1.7) geldt, omdat:

$$C_{k+1} = 0 \quad \text{voor } k > r-1 \quad (V.1.8)$$

De graaf met horizon één van model (V.1.3) kan bij $r = 2$ aldus schematisch worden weergegeven:



(V.1.9)

De directe-invloedmatrix van (V.1.9) is gelijk aan:

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_{-1} & y_0 & y_{+1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_{+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & D(y_{-1}, y_{+1}) \\ 0 & 0 & D(y_0, y_{+1}) \\ 0 & 0 & D(y_{+1}, y_{+1}) \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_{-1} & y_0 & y_{+1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_{+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & C'_2 \\ 0 & 0 & C'_1 \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (V.1.10)$$

De totale-invloedmatrix is per definitie gelijk aan^{*}):

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} D^k \quad (V.1.11)$$

Indien de absolute waarde van elke eigenwaarde van:

$$D_{(y_{+1}, y_{+1})} = A' \quad (V.1.12)$$

kleiner is dan één, kan (V.1.11) - analoog aan (III.5.11) tot en met (III.5.32) - herschreven worden tot:

$$T = [I-D]^{-1} - I = D [I-D]^{-1} =$$

$$\begin{array}{c} y_{-1} \quad y_0 \quad y_{+1} \\ y_{-1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{(y_{-1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_0, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_{+1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \end{bmatrix} \\ = y_0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{(y_{-1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_0, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_{+1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \end{bmatrix} \\ y_{+1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{(y_{-1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_0, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \\ 0 & 0 & D_{(y_{+1}, y_{+1})} [I-D_{(y_{+1}, y_{+1})}]^{-1} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} y_{-1} \quad y_0 \quad y_{+1} \\ y_{-1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_2)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_1)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} A)' \end{bmatrix} \\ = y_0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_2)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_1)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} A)' \end{bmatrix} \\ y_{+1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_2)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} C_1)' \\ 0 & 0 & ([I-A]^{-1} A)' \end{bmatrix} \end{array} \quad (V.1.13)$$

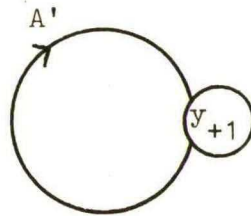
Na generalisatie voor $r > 2$ volgt uit (V.1.13) dat

$$T_{(y_0, y_{+1})} = (T_{(y_0, y_{+1})})' = ([I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.14)$$

$$T_{(y_{-k}, y_{+1})} = (T_{(y_{-k}, y_{+1})})' = ([I-A]^{-1} C_{k+1})' \quad \text{voor } 0 \leq k \leq r-1 \quad (V.1.15)$$

^{*}) Zie: (I.5.15).

De elementen van (V.1.13) kunnen berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9) uit de graaf (V.1.9) met als endogene graaf:



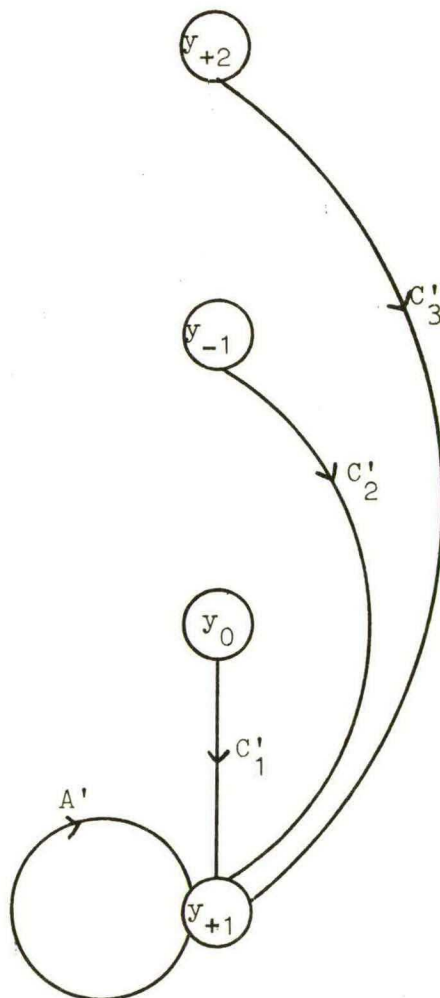
(V.1.16)

De elementen van (V.1.14) en (V.1.15) kunnen ook berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9).

De endogene graaf (V.1.16) blijft ongewijzigd maar de graaf (V.1.9) moet uitgebreid worden tot en met y_{-r+1} .

Voorbeeld:

Voor $r = 3$ wordt (V.1.9):



(V.1.17)

De waarde van de multiplier van de endogene graaf (V.1.16) is gelijk aan^{*}):

$$M_{h,1} = \frac{1}{|I-A'|} \quad (V.1.18)$$

Uit (V.1.4) volgt dat:

$$y_{+2} = [I-A]^{-1}c_1 y_{+1} + [I-A]^{-1}c_2 y_0 + \dots + [I-A]^{-1}c_r y_{-r+2} \quad (V.1.19)$$

Substitutie van (V.1.4) in (V.1.19) geeft:

$$\begin{aligned} y_{+2} = & \{[I-A]^{-1}c_2 + ([I-A]^{-1}c_1)^2\}y_0 + \\ & + \{[I-A]^{-1}c_3 + [I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_2\}y_{-1} + \\ & + \{[I-A]^{-1}c_4 + [I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_3\}y_{-2} + \dots \\ & \dots + \{[I-A]^{-1}c_r + [I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_{r-1}\}y_{-r+2} + \\ & + \{[I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_r\}y_{-r+1} \end{aligned} \quad (V.1.20)$$

Uit (V.1.20) volgt dat:

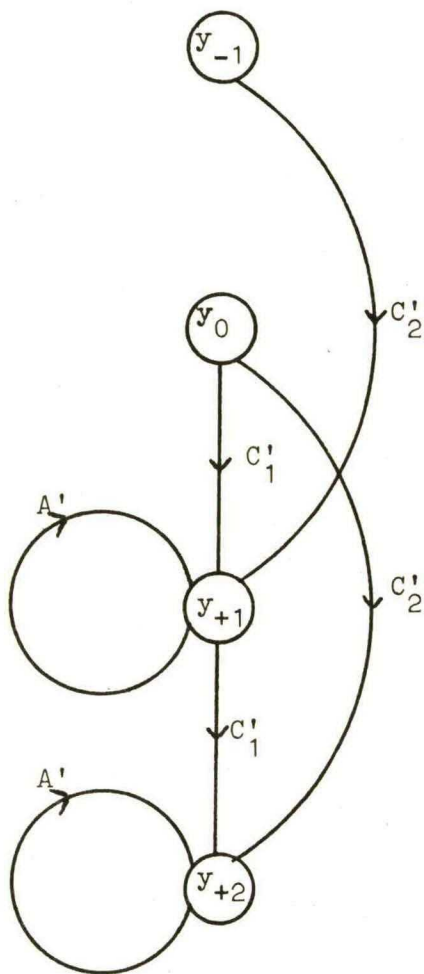
$$\begin{aligned} T_{(y_{-k}, y_{+2})} &= \{[I-A]^{-1}c_{k+2} + [I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_{k+1}\} = \\ &= \{[I-A]^{-1}c_{k+2} + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}c_{k+1}\} \\ &\text{voor } 0 \leq k \leq r-2 \end{aligned} \quad (V.1.21)$$

$$\begin{aligned} T_{(y_{-k}, y_{+2})} &= [I-A]^{-1}c_1 [I-A]^{-1}c_r = \\ &= T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}c_r \quad \text{voor } k = r-1 \end{aligned} \quad (V.1.22)$$

*) Zie: (IV.2.18).

$$T(y_{-k}, y_{+2}) = 0 \quad \text{voor } k > r-1 \quad (V.1.23)$$

De graaf met horizon twee van model (V.1.3) kan bij $r = 2$ aldus schematisch worden weergegeven:



(V.1.24)

Via berekening van de totale-invloedmatrix van (V.1.24) en na generalisatie voor $r > 2$ vindt men dat:

$$T(y_{-k}, y_{+2}) = (T(y_{-k}, y_{+2}))' \quad k \geq 0 \quad (V.1.25)$$

In figuur (V.1.24) geldt volgens (V.1.25) en (V.1.21) dat:

$$\begin{aligned} T(y_0, y_{+2}) &= ([I-A]^{-1}C_2 + [I-A]^{-1}C_1 [I-A]^{-1}C_1)' = \\ &= ([I-A]^{-1}C_2 + T(y_0, y_{+1})[I-A]^{-1}C_1)' \end{aligned} \quad (V.1.25a)$$

In figuur (V.1.24) gaan twee enkelvoudige paden van y_0 naar y_{+2} nl.:

- a. (y_0, y_{+1}, y_{+2})
- b. (y_0, y_{+2}) (V.1.26)

Pad a gaat via y_{+1} en pad b gaat rechtstreeks naar y_{+2} . Pad a overbruggt het tijdvak van periode 0 naar periode 2 in twee stappen:

- stap 1: van periode 0 naar periode 1
- stap 2: van periode 1 naar periode 2 (V.1.27)

Pad b overbruggt het tijdvak van periode 0 naar periode 2 in één stap.

De totale invloed van y_0 op y_{+2} via pad b is in (V.1.25a) gegeven in:

$$([I-A]^{-1}C_2)' \quad (V.1.28)$$

De totale invloed via iedere stap in pad a is gelijk aan

$$([I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.29)$$

De totale invloed van y_0 op y_{+2} via pad a is gelijk aan het produkt van de totale invloed via de twee stappen*) en is in (V.1.25a) gegeven in:

$$([I-A]^{-1}C_1 [I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.30)$$

Omdat de matrix in (V.1.30) getransponeerd moet worden heeft de eerste submatrix:

*) Dit komt overeen met de vermenigvuldigingsregel (I.5.3).

$$([I-A]^{-1}C_1)'$$
(V.1.31)

betrekking op de totale invloed via stap 2: van periode 1 naar periode 2.

(V.1.31) is volgens (V.1.14) gelijk aan de totale invloed van y_0 op y_{+1} :

$$(T_{(y_0, y_{+1})})'$$
(V.1.32)

(V.1.30) is dus gelijk aan:

$$(T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_1)'$$
(V.1.33)

De som van de totale invloed via pad a - zoals gegeven in (V.1.33) - en de totale invloed via pad b - zoals gegeven in (V.1.28) - is gelijk aan (V.1.25a).

De totale invloed van y_{-1} op y_{+2} gaat via één enkelvoudig pad, nl.:

(y_{-1}, y_{+1}, y_{+2}) . Dit pad overbrugt het tijdvak van periode -1 naar periode 2 in twee stappen:

stap 1: van periode -1 naar periode 1

stap 2: van periode 1 naar periode 2

(V.1.34)

De totale invloed via stap 1 is gegeven in:

$$([I-A]^{-1}C_2)'$$
(V.1.35)

De totale invloed via stap 2 is gegeven in:

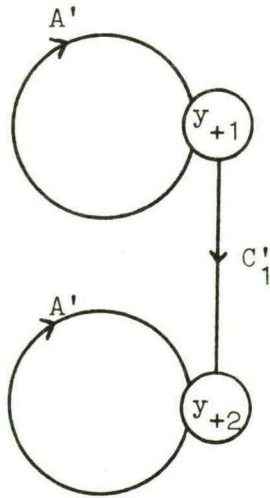
$$([I-A]^{-1}C_1)' = (T_{(y_0, y_{+1})})'$$
(V.1.36)

De totale invloed van y_{-1} op y_{+2} is gelijk aan het produkt van (V.1.35) en (V.1.36):

$$T_{(y_{-1}, y_{+2})} = ([I-A]^{-1}C_1 [I-A]^{-1}C_2)' = (T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_2)' \quad (V.1.37)$$

Dit komt volgens (V.1.25) overeen met (V.1.22).

De elementen van (V.1.25a) en (V.1.37) kunnen berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9) uit de graaf (V.1.24) met als endogene graaf:



(V.1.38)

De waarde van de multiplier van de endogene graaf (V.1.38) is gelijk aan^{*}:

$$M_{h,2} = \frac{1}{|I-A'|^2} = M_{h,1}^2 \quad (V.1.39)$$

Volgens de formule van Mason en (V.1.39) geldt voor de elementen van (V.1.37) dat:

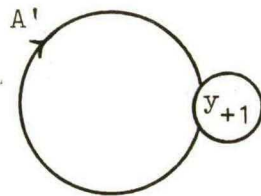
$$\tau(y_{i-1}, y_{j+2}) = \sum_{k=1}^a \Pi_k^m M = M_{h,1}^2 \sum_{k=1}^a \Pi_k^m \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (V.1.40)$$

Analoog aan de afleiding van (IV.3.44) geldt voor de elementen van (V.1.25a) dat:

$$\tau(y_{i_0}, y_{j+2}) = M_{h,1}^2 \sum_{k=1}^{a'} \Pi_k^m + M_{h,1} \sum_{k=a'+1}^a \Pi_k^{m'} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (V.1.41)$$

* Zie: (IV.2.20).

waarbij de sommatie van 1 tot a' betrekking heeft op de paden van y_{i_0} naar $y_{j_{+2}}$, welke lopen via y_{+1} en waarbij de sommatie van $(a'+1)$ tot a betrekking heeft op de paden van y_{i_0} naar $y_{j_{+2}}$, welke niet lopen via y_{+1} maar rechtstreeks naar y_{+2} gaan en waarbij m'_k niet de circuits bevat die liggen in:

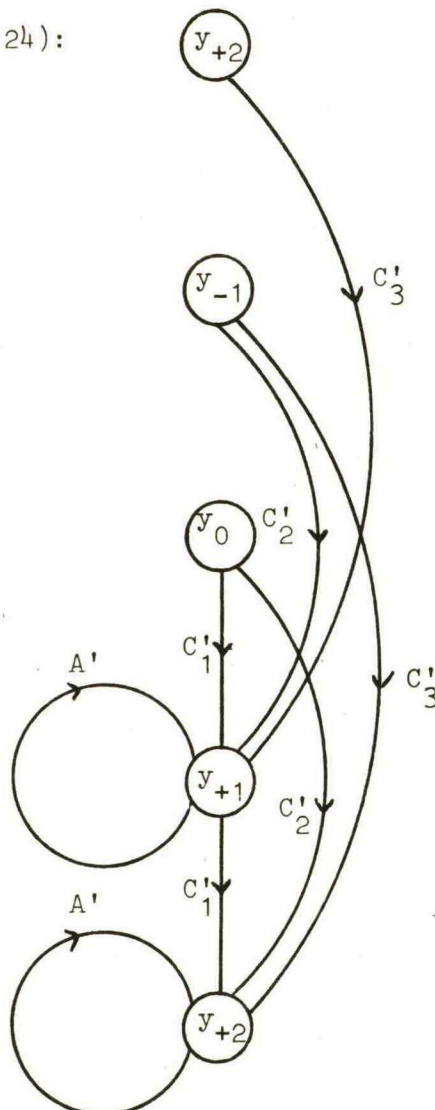


(V.1.42)

De elementen van (V.1.21) en (V.1.22) kunnen ook berekend worden met de formule van Mason voor $r > 2$. De endogene graaf (V.1.38) blijft ongewijzigd, maar de graaf (V.1.24) moet uitgebreid worden tot en met y_{-r+1} .

Voorbeeld:

Voor $r = 3$ wordt (V.1.24):



(V.1.43)

De opsplitsing in (V.1.41) is in (V.1.43) ook van toepassing op de totale invloed van y_{-1} op y_{+2} maar niet op de totale invloed van y_{-2} op y_{+2} . Voor deze laatste invloed geldt (V.1.40).

Uit (V.1.20), (V.1.21) en (V.1.22) volgt dat:

$$\begin{aligned}
 y_{+3} = & \{T_{(y_0, y_{+2})}\} y_{+1} + \\
 & + \{[I-A]^{-1}C_3 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_2\} y_0 + \\
 & + \{[I-A]^{-1}C_4 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_3\} y_{-1} + \dots \\
 & \dots + \{[I-A]^{-1}C_r + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_{r-1}\} y_{-r+3} + \\
 & + \{T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_r\} y_{-r+2}
 \end{aligned} \tag{V.1.44}$$

Substitutie van (V.1.4) in (V.1.44) geeft:

$$\begin{aligned}
 y_{+3} = & \{[I-A]^{-1}C_3 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_2 + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_1\} y_0 + \\
 & \{[I-A]^{-1}C_4 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_3 + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_2\} y_{-1} + \dots \\
 & \dots + \{[I-A]^{-1}C_r + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_{r-1} + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_{r-2}\} y_{-r+3} + \\
 & + \{T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_r + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_{r-1}\} y_{-r+2} + \\
 & + \{T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_r\} y_{-r+1}
 \end{aligned} \tag{V.1.45}$$

Uit (V.1.45) volgt dat:

$$\begin{aligned}
 T_{(y_{-k}, y_{+3})} = & \{[I-A]^{-1}C_{k+3} + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_{k+2} + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_{k+1}\} \\
 & \text{voor } 0 \leq k \leq r-3
 \end{aligned} \tag{V.1.46}$$

$$T(y_{-k}, y_{+3}) = \{T(y_0, y_{+1})[I-A]^{-1}C_r + T(y_0, y_{+2})[I-A]^{-1}C_{r-1}\}$$

voor $k = r-2$ (V.1.47)

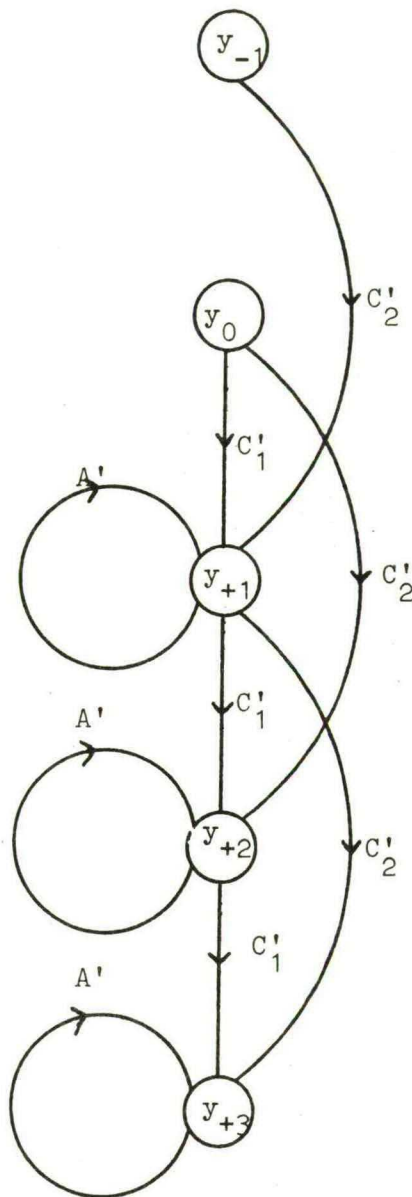
$$T(y_{-k}, y_{+3}) = T(y_0, y_{+2})[I-A]^{-1}C_r$$

voor $k = r-1$ (V.1.48)

$$T(y_{-k}, y_{+3}) = 0$$

voor $k > r-1$ (V.1.49)

De graaf met horizon drie van model (V.1.3) kan bij $r = 2$ aldus schematisch worden weergegeven:



(V.1.50)

Via berekening van de totale-invloedmatrix van (V.1.50) en na generalisatie voor $r > 2$ vindt men dat:

$$T_{(y_{-k}, y_{+3})} = (T_{(y_{-k}, y_{+3})})' \quad k \geq 0 \quad (V.1.51)$$

In figuur (V.1.50) geldt volgens (V.1.47) en (V.1.51) dat:

$$T_{(y_0, y_{+3})} = (T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} C_2 + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.52)$$

Volgens (V.1.14) en (V.1.21) is (V.1.52) gelijk aan:

$$T_{(y_0, y_{+3})} = ([I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} C_2 + \{[I-A]^{-1} C_2 + [I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} C_1\} [I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.53)$$

In figuur (V.1.50) gaan drie enkelvoudige paden van y_0 naar y_{+3} :

a. $(y_0, y_{+1}, y_{+2}, y_{+3})$

b. (y_0, y_{+1}, y_{+3})

c. (y_0, y_{+2}, y_{+3})

(V.1.54)

De paden a en b gaan via y_{+1} ; pad c gaat niet via y_{+1} .

Pad a overbrugt het tijdvak van periode 0 naar periode 3 in 3 stappen, pad b doet dat in twee stappen. Stap 1 van pad a én pad b gaat van periode 0 naar periode 1. De totale invloed via die stap is gegeven in:

$$([I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.55)$$

De totale invloed via stap 2 en stap 3 van pad a zijn gelijk aan (V.1.55).

De totale invloed van y_0 op y_{+3} via pad a is gelijk aan het produkt van de invloed via de drie stappen:

$$([I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.56)$$

De totale invloed via stap 2 van pad b is gegeven in:

$$([I-A]^{-1}C_2)'$$
 (V.1.57)

De totale invloed via pad b is gelijk aan het produkt van de invloed via stap 1 (V.1.55) en via stap 2 (V.1.57):

$$([I-A]^{-1}C_2[I-A]^{-1}C_1)'$$
 (V.1.58)

De totale invloed via pad a en b samen is gelijk aan de som van (V.1.56) en (V.1.58)*):

$$([I-A]^{-1}C_2[I-A]^{-1}C_1 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_1)'$$
 (V.1.59)

Volgens (V.1.25a) is (V.1.59) gelijk aan:

$$\begin{aligned} & (([I-A]^{-1}C_2 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_1)[I-A]^{-1}C_1)' = \\ & (T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_1)' \end{aligned}$$
 (V.1.60)

(V.1.60) is gelijk aan de tweede submatrix in (V.1.52).

Daarin wordt de som van de totale invloed van pad a en pad b beschouwd als de totale invloed via één overbrugging van de periode 0 naar de periode 3, welke overbrugging bestaat uit twee stappen:

stap 1: van periode 0 naar periode 1; met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_1)'$$
 (V.1.61)

stap 2: van periode 1 naar periode 3; met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+2})})'$$
 (V.1.62)

*) Dit komt overeen met de optellingsregel (I.5.4).

De totale invloed via pad c wordt in (V.1.52) beschouwd als de totale invloed via één overbrugging van de periode 0 naar de periode 3, welke overbrugging bestaat uit twee stappen:

stap 1: van periode 0 naar periode 2; met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_2)', \quad (V.1.63)$$

stap 2: van periode 2 naar periode 3; met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+1})})', \quad (V.1.64)$$

De totale invloed van y_{-1} op y_{+3} in figuur (V.1.50) is volgens (V.1.48) gelijk aan

$$T_{(y_{-1}, y_{+3})} = (T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_2)', \quad (V.1.65)$$

In (V.1.65) wordt het tijdvak van periode -1 naar periode 3 eenmaal overbrugd in twee stappen:

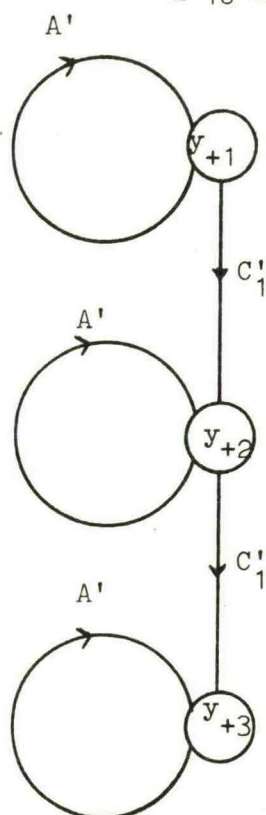
stap 1: van periode -1 naar periode 1; met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_2)', \quad (V.1.66)$$

stap 2: van periode 1 naar periode 3; met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+2})})', \quad (V.1.67)$$

De elementen van (V.1.52) en van (V.1.65) kunnen berekend worden met de formule van Mason (V.1.9) uit de graaf (V.1.50) met als endogene graaf:



(V.1.68)

De waarde van de multiplier van de endogene graaf (V.1.68) is gelijk aan^{*}):

$$M_{h,3} = \frac{1}{|I-A'|^3} = M_{h,1}^3 \quad (V.1.69)$$

Volgens de formule van Mason geldt voor de elementen van (V.1.52) dat:

$$\tau(y_{i_0}, y_{j_{+3}}) = \sum_{k=1}^a \Pi_k^m M_k \quad (V.1.70)$$

De sommatie in (V.1.70) kan opgesplitst worden in drie delen overeenkomstig de drie paden in (V.1.50) zoals gegeven in (V.1.54).

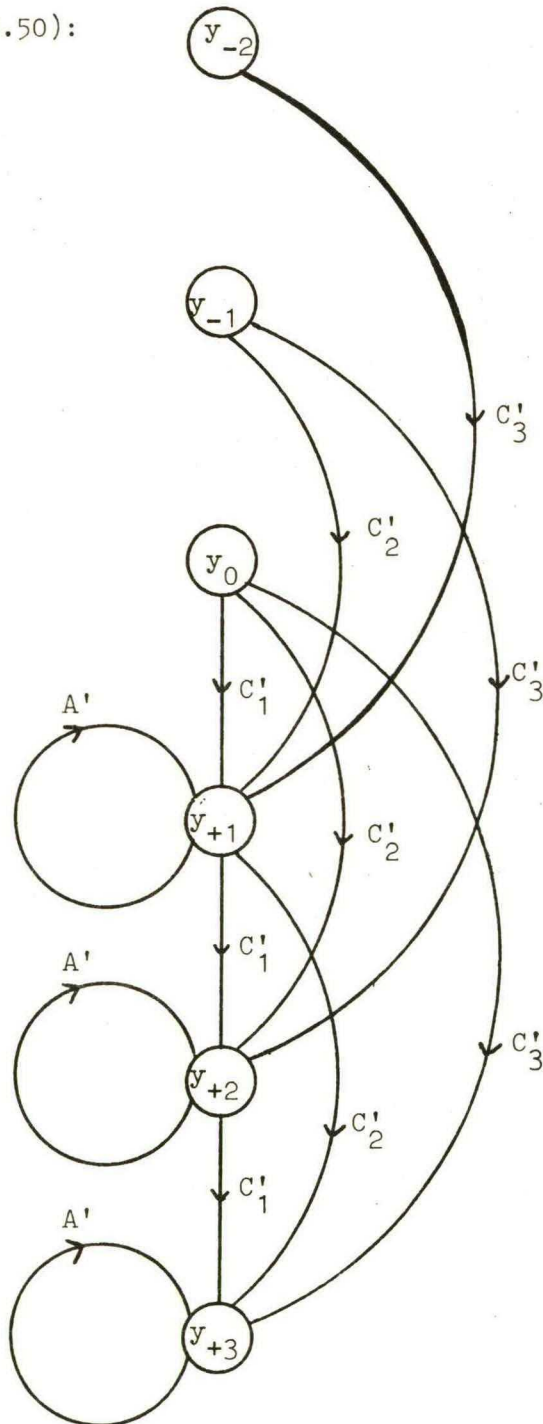
De sommatie voor de berekening van de totale invloed van $y_{i_{-1}}$ op $y_{j_{+3}}$ kan in twee delen opgesplitst worden overeenkomstig de twee paden van y_{-1} naar y_{+3} in (V.1.50).

*) Zie: (IV.2.35).

De elementen van (V.1.46), (V.1.47) en (V.1.48) kunnen ook berekend worden met de formule van Mason voor $r > 2$. De endogene graaf (V.1.68) blijft ongewijzigd, maar de graaf (V.1.50) moet uitgebreid worden tot en met y_{-r+1} .

Voorbeeld:

Voor $r = 3$ wordt (V.1.50):



(V.1.71)

Het voorafgaande kan gegeneraliseerd worden.

Ten behoeve van een beter inzicht wordt eerste de totale invloed gegeven van y_0 op $y_{+\kappa}$ voor $\kappa = 1, 2, \dots, r$.

Voor $1 \leq \kappa \leq r$ geldt:

$$T_{(y_0, y_{+\kappa})} = (T_{(y_0, y_{+\kappa})})' = ([I-A]^{-1}C_{\kappa} + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_{\kappa-1} + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_{\kappa-2} + \dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})}[I-A]^{-1}C_2 + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})}[I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.72)$$

Voorbeeld:

In figuur (V.1.71) is $r = 3$. Daar geldt:

$$T_{(y_0, y_{+1})} = ([I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.73)$$

$$T_{(y_0, y_{+2})} = ([I-A]^{-1}C_2 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.74)$$

$$T_{(y_0, y_{+3})} = ([I-A]^{-1}C_3 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}C_2 + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}C_1)' \quad (V.1.75)$$

De totale invloed van y_0 op $y_{+\kappa}$ is in (V.1.72) gelijk aan de som van κ matrices. Elke matrix kan beschouwd worden als de waarde van een overbrugging van het tijdvak van periode 0 naar periode κ . Er zijn κ overbruggingen. Het tijdvak kan één keer rechtstreeks overbrugd worden, omdat $\kappa \leq r$. De totale invloed via die overbrugging is gegeven in:

$$([I-A]^{-1}C_{\kappa})' \quad (V.1.76)$$

Vervolgens wordt het tijdvak $(\kappa-1)$ maal overbrugd in twee stappen.

Voorbeeld:

(V.1.73) bevat slechts één overbrugging, omdat $\kappa = 1$. Het is een rechtstreekse overbrugging en komt overeen met (V.1.76).

(V.1.74) bevat één rechtstreekse overbrugging van y_0 naar y_{+2} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_2)', \quad (V.1.77)$$

en één overbrugging in twee stappen:

1. van y_0 naar y_{+1} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_1)', \quad (V.1.78)$$

2. van y_{+1} naar y_{+2} . De totale invloed daarvan is gelijk aan:

$$(T_{(y_0, y_{+1})})', \quad (V.1.79)$$

(V.1.75) bevat één rechtstreekse overbrugging van y_0 naar y_{+3} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_3)', \quad (V.1.80)$$

en twee overbruggingen in twee stappen:

a.1. van y_0 naar y_{+2} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_2)', \quad (V.1.81)$$

2. van y_{+2} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+1})})', \quad (V.1.82)$$

b.1. van y_0 naar y_{+1} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}C_1)', \quad (V.1.83)$$

2. van y_{+1} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+2})})' \quad (V.1.84)$$

(III.1.72) kan verder gegeneraliseerd worden.

Voor: $0 \leq k \leq r-1$

$1 \leq \kappa \leq r$

$k+\kappa \leq r$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(y_{-k}, y_{+\kappa})} &= (T_{(y_{-k}, y_{+\kappa})})' = ([I-A]^{-1} C_{k+\kappa} + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} C_{k+\kappa-1} + \\ &+ T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} C_{k+\kappa-2} + \dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})} [I-A]^{-1} C_{k+2} + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} C_{k+1})' \end{aligned} \quad (V.1.85)$$

De κ matrices van (V.1.85) kunnen op dezelfde wijze geïnterpreteerd worden als de κ matrices van (V.1.72): één rechtstreekse overbrugging en $(\kappa-1)$ overbruggingen in twee stappen.

Wanneer $k+\kappa > r$ is er geen rechtstreekse overbrugging mogelijk zoals in (V.1.72) en (V.1.85). Elke overbrugging gebeurt dan in twee stappen. Via generalisatie van (V.1.22), (V.1.47) en (V.1.48) kan de totale invloed bepaald worden van y_0 op $y_{+\kappa}$ voor $\kappa > r$.

Voor $\kappa > r$ geldt:

$$\begin{aligned} T_{(y_0, y_{+\kappa})} &= (T_{(y_0, y_{+\kappa-r})} [I-A]^{-1} C_r + T_{(y_0, y_{+\kappa-r+1})} [I-A]^{-1} C_{r-1} + \dots \\ &\dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})} [I-A]^{-1} C_2 + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} C_1)' \end{aligned} \quad (V.1.86)$$

(V.1.86) bevat κ overbruggingen in twee stappen.

Voorbeeld:

In figuur (V.1.50) is $r = 2$. Daar geldt volgens (V.1.86):

$$T_{(y_0, y_{+3})} = (T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} C_2 + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.87)$$

In (V.1.52) tot en met (V.1.64) is uitgelegd dat (V.1.87) beschouwd kan worden als de som van de totale invloed via twee overbruggingen, elk in twee stappen:

a.1. van y_0 naar y_{+1} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1} C_1)' \quad (V.1.88)$$

2. van y_{+1} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+2})})' \quad (V.1.89)$$

De totale invloed via overbrugging a is gelijk aan het produkt van (V.1.88) en (V.1.89) zoals gegeven in de tweede matrix van (V.1.87).

b.1. van y_0 naar y_{+2} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1} C_2)' \quad (V.1.90)$$

2. van y_{+2} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+1})})' \quad (V.1.91)$$

De totale invloed via overbrugging b is gelijk aan het produkt van (V.1.90) en (V.1.91) zoals gegeven in de eerste matrix van (V.1.87).

Omdat y_{-k} voor $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$ als gegeven beschouwd zijn, worden ze niet beïnvloed binnen het model. De eerste stap van de overbrugging van periode $-k$ naar $+\kappa$ moet daarom verder gaan dan y_0 . Door de beperkingen van k en κ in (V.1.85) was

dit altijd het geval. Wanneer we (V.1.86) verder generaliseren moeten we daar wel rekening mee houden.

Voor: $0 \leq k \leq r-1$

$1 \leq \kappa$

$k+\kappa > r$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(y_{-k}, y_{+\kappa})} = & (T_{(y_0, y_{+k+\kappa-r})} [I-A]^{-1} C_r + T_{(y_0, y_{+k+\kappa-r+1})} [I-A]^{-1} C_{r-1} + \dots \\ & \dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})} [I-A]^{-1} C_{k+2} + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} C_{k+1})' \end{aligned} \quad (V.1.92)$$

De eerste stap van de overbrugging is het kleinste in

$$[I-A]^{-1} C_{k+1} \quad (V.1.93)$$

en komt in y_{+1} terecht.

Voorbeeld:

In figuur (V.1.71) is $r = 3$ en geldt volgens (V.1.92)

$$T_{(y_{-1}, y_{+3})} = (T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} C_3 + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} C_2)' \quad (V.1.94)$$

De totale invloed van y_{-k} voor $k > r-1$ is nul, omdat de eerste stap maximaal r perioden overbrugt^{*}. De eerste stap haalt dus niet de periode y_{+1} .

Voor: $1 \leq \kappa$

$k+1 > r$

*) $C_k = 0$ voor $k > r$. Zie: (V.1.8).

geldt:

$$T(y_{-k}, y_{+k}) = 0 \quad (V.1.95)$$

De elementen van (V.1.85) en (V.1.92) kunnen - zoals in het voorafgaande bij $k \leq 3$ - berekend worden met de formule van Mason (V.1.9).

Uit (V.1.85) en (V.1.92) blijkt, dat de invloed van y_{-k} ($0 \leq k \leq r-1$) op de endogene variabelen in de toekomst af neemt indien

$$T(y_0, y_{+k}) \rightarrow 0 \text{ voor } k \rightarrow \infty \quad (V.1.96)$$

(V.1.2) is een systeem van m differentie-vergelijkingen van de orde r . Dit systeem kan omgezet worden in een systeem van $m \times r$ differentie-vergelijkingen van de eerste orde^{*}). De matrix van coëfficiënten van de vertraagde endogene variabelen wordt dan:

$$[[I-A]^{-1}C]_{r \times m \times r} = \begin{bmatrix} [I-A]^{-1}C_1 & [I-A]^{-1}C_2 & \dots & [I-A]^{-1}C_{r-1} & [I-A]^{-1}C_r \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (V.1.97)$$

Uit (V.1.5) volgt dat de $m \times m$ submatrix in de linkerbovenhoek van (V.1.97) gelijk is aan:

^{*}) Zie Theil en Boot [6] en Chow [1].

$$T_{(y_0, y_{+1})} = [I-A]^{-1}C_1 \quad (V.1.98)$$

De tweede macht van $[[I-A]^{-1}C_r]_{mxr}$ is gelijk aan:

$$\{[[I-A]^{-1}C_r]_{mxr}\}^2 = \begin{bmatrix} \{[I-A]^{-1}C_1\}^2 + [I-A]^{-1}C_2 & [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_2 + [I-A]^{-1}C_3 & \dots \\ [I-A]^{-1}C_1 & [I-A]^{-1}C_2 & \dots \\ I & 0 & \dots \\ 0 & I & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (V.1.99)$$

Uit (V.1.21) volgt dat de mxm submatrix in de linkerbovenhoek van (V.1.99) gelijk is aan

$$T_{(y_0, y_{+2})} \quad (V.1.100)$$

Zo doorgaande vindt men dat de mxm submatrix in de linkerbovenhoek van de macht κ van (V.1.97) gelijk is aan:

$$T_{(y_0, y_{+\kappa})} \quad (V.1.101)$$

Hieruit volgt dat (V.1.94) geldt, indien:

$$\{[[I-A]^{-1}C_r]_{mxr}\}^\kappa \rightarrow 0 \text{ voor } \kappa \rightarrow \infty \quad (V.1.102)$$

(V.1.102) geldt, indien de absolute waarde van elke eigenwaarde van (V.1.97) kleiner is dan één.

V.2. Het dynamisch model met meerdere vertragingen, met exogene variabelen.

We beschouwen een dynamisch model met meerdere vertragingen zoals in (III.1.10):

$$y = A y + C_1 y_{-1} + \dots + C_r y_{-r} + E_0 z + E_1 z_{-1} + \dots + E_s z_{-s} \quad (V.2.1)$$

De gereduceerde vorm van (V.2.1) is gelijk aan:

$$y = [I-A]^{-1} C_1 y_{-1} + \dots + [I-A]^{-1} C_r y_{-r} + [I-A]^{-1} E_0 z + [I-A]^{-1} E_1 z_{-1} + \dots \\ \dots + [I-A]^{-1} E_s z_{-s} \quad (V.2.2)$$

De waarde van de endogene variabelen in periode nul en in de (r-1) voorafgaande perioden wordt als gegeven beschouwd, evenals de waarde van de exogene variabelen in alle perioden. We gaan nu onderzoeken wat de totale invloed is van y_0 , y_{-1} , y_{-2} , ... en van de exogene variabelen op de endogene variabelen in de toekomst.

Uit (V.2.1) volgt dat:

$$y_{+1} = A y_{+1} + C_1 y_0 + C_2 y_{-1} + \dots + C_r y_{-r+1} + \\ + E_0 z_{+1} + E_1 z_0 + E_2 z_{-1} + \dots + E_s z_{-s+1} \quad (V.2.3)$$

Uit (V.2.3) en (V.2.2.) volgt dat:

$$y_{+1} = [I-A]^{-1} C_1 y_0 + [I-A]^{-1} C_2 y_{-1} + \dots + [I-A]^{-1} C_r y_{-r+1} + \\ + [I-A]^{-1} E_0 z_{+1} + [I-A]^{-1} E_1 z_0 + [I-A]^{-1} E_2 z_{-1} + \dots + [I-A]^{-1} E_s z_{-s+1} \quad (V.2.4)$$

De totale invloed van y_{-k} op y_{+k} is in model (V.2.3) hetzelfde als in model (V.1.3) en is gegeven in (V.1.84), (V.1.90) en (V.1.93). We zullen onze aandacht in deze paragraaf daarom richten op de berekening van de totale invloed van de exogene variabelen.

Uit (V.2.4) volgt dat:

$$T_{(z_{+1}, y_{+1})} = [I-A]^{-1} E_{-1+1} \quad \text{voor } l = 1, 0, -1, \dots, -s+2, -s+1 \quad (\text{V.2.5})$$

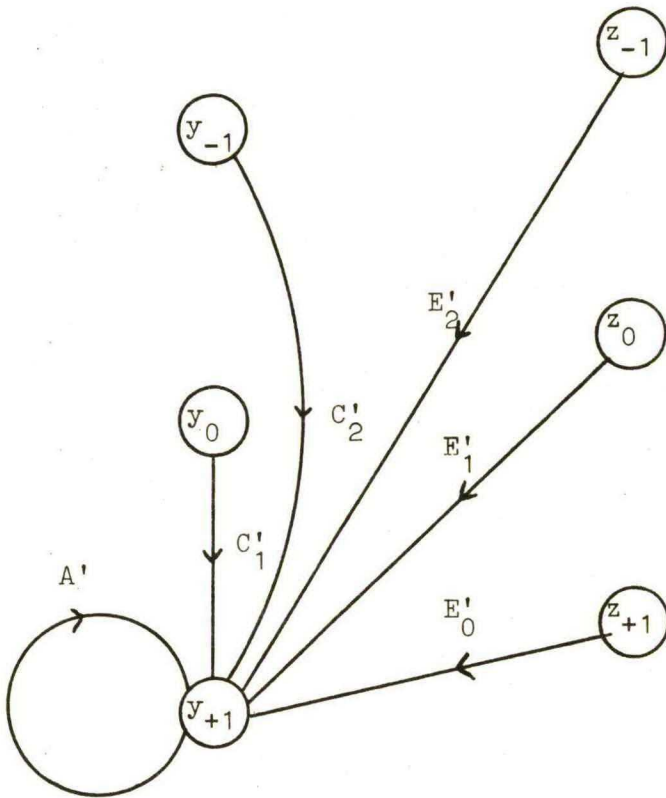
$$T_{(z_{+1}, y_{+1})} = 0 \quad \text{voor } l < -s+1 \quad (\text{V.2.6})$$

(V.2.6) geldt, omdat:

$$E_{-1+1} = 0 \quad \text{voor } l < -s+1 \quad (\text{V.2.7})$$

In (V.1.84), (V.1.90) en (V.1.93) is de totale invloed gegeven van y_{-k} . Daarbij is $-k$ altijd kleiner of gelijk aan nul. In deze paragraaf wordt de totale invloed berekend van z_{+1} . Daarbij kan $+1$ zowel positief als negatief zijn.

De graaf met horizon één van model (V.2.3) kan bij $r = 2$ en $s = 2$ aldus schematisch worden weergegeven:



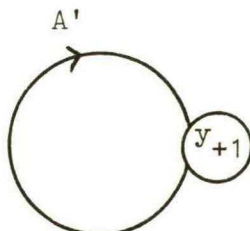
(V.2.8)

Via berekening van de totale-invloedmatrix van (V.2.8) en na generalisatie voor $r > 2$ en $s > 2$ vindt men dat:

$$T_{(z_{+1}, y_{+1})} = (T_{(z_{+1}, y_{+1})})' = ([I - A]^{-1} E_{-1+1})'$$

voor $-s+1 \leq l \leq 1$ (V.2.9)

De elementen van (V.2.9) voor $s = 2$ kunnen berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9) uit de graaf (V.2.8) met als endogene graaf:



(V.2.10)

De elementen van (V.2.9) voor $s > 2$ kunnen ook berekend worden met de formule van Mason. De endogene graaf (V.2.10) blijft ongewijzigd maar de graaf (V.2.8) moet uitgebreid worden tot en met z_{-s+1} .

Uit (V.2.4) volgt dat:

$$\begin{aligned} y_{+2} = & [I-A]^{-1}C_1 y_{+1} + [I-A]^{-1}C_2 y_0 + \dots + [I-A]^{-1}C_r y_{-r+2} + \\ & + [I-A]^{-1}E_0 z_{+2} + [I-A]^{-1}E_1 z_{+1} + [I-A]^{-1}E_2 z_0 + \dots + [I-A]^{-1}E_s z_{-s+2} \end{aligned} \quad (V.2.11)$$

Substitutie van (V.2.4) in (V.2.11) geeft:

$$\begin{aligned} y_{+2} = & \{[I-A]^{-1}C_2 + ([I-A]^{-1}C_1)^2\} y_0 + \\ & + \{[I-A]^{-1}C_3 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_2\} y_{-1} + \\ & + \{[I-A]^{-1}C_4 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_3\} y_{-2} + \dots \\ & \dots + \{[I-A]^{-1}C_r + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_{r-1}\} y_{-r+2} + \\ & + \{[I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}C_r\} y_{-r+1} + \\ & + \{[I-A]^{-1}E_0\} z_{+2} + \\ & + \{[I-A]^{-1}E_1 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}E_0\} z_{+1} + \\ & + \{[I-A]^{-1}E_2 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}E_1\} z_0 + \\ & + \{[I-A]^{-1}E_3 + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}E_2\} z_{-1} + \dots \\ & \dots + \{[I-A]^{-1}E_s + [I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}E_{s-1}\} z_{-s+2} + \\ & + \{[I-A]^{-1}C_1[I-A]^{-1}E_s\} z_{-s+1}. \end{aligned} \quad (V.2.12)$$

Uit (V.2.12) en (V.1.84) volgt dat:

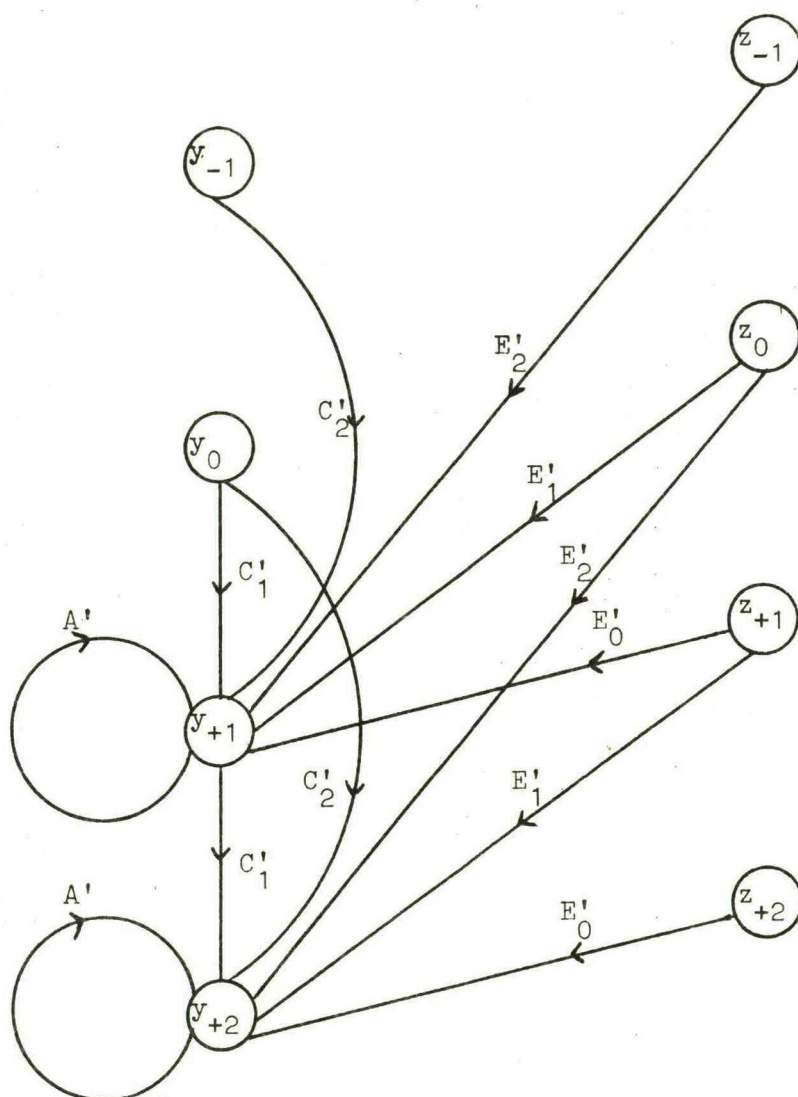
$$T_{(z_{+1}, y_{+2})} = [I-A]^{-1} E_0 \quad \text{voor } l = 2 \quad (V.2.13)$$

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+2})} &= \{[I-A]^{-1} E_{-l+2} + [I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} E_{-l+1}\} = \\ &= \{[I-A]^{-1} E_{-l+2} + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_{-l+1}\} \\ &\quad \text{voor } l = 1, 0, -1, \dots, -s+3, -s+2 \end{aligned} \quad (V.2.14)$$

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+2})} &= [I-A]^{-1} C_1 [I-A]^{-1} E_s = \\ &= T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_s \quad \text{voor } l = -s+1 \end{aligned} \quad (V.2.15)$$

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+2})} &= 0 \\ &\quad \text{voor } l > 2 \text{ en } l < -s+1 \end{aligned} \quad (V.2.16)$$

De graaf met horizon twee van model (V.2.3) kan bij $r = 2$ en $s = 2$ aldus schematisch worden weergegeven:



(V.2.17)

Via berekening van de totale-invloedmatrix van (V.2.17) en na generalisatie van $r > 2$ en $s > 2$ vindt men dat:

$$T_{(z_{+1}, y_{+2})} = (T_{(z_{+1}, y_{+2})})' \quad (V.2.18)$$

De elementen van (V.2.18) voor $s = 2$ kunnen berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9) uit de graaf (V.2.17) met als endogene graaf (V.1.33).

De elementen van (V.2.18) voor $s > 2$ kunnen ook berekend worden met de formule van Mason. De endogene graaf blijft ongewijzigd maar de graaf (V.2.17) moet uitgebreid worden tot en met z_{-s+1} .

De matrices in (V.2.13) tot en met (V.2.16) kunnen op dezelfde wijze geïnterpreteerd worden als de matrices in (V.1.72). (V.2.13) bevat een rechtstreekse overbrugging.

Voorbeeld:

In figuur (V.2.17) geldt:

$$T_{(z_{+2}, y_{+2})} = (T_{(z_{+2}, y_{+2})})' = ([I-A]^{-1}E_0)' \quad (V.2.19)$$

(V.2.14) bevat een rechtstreekse overbrugging en een overbrugging in twee stappen.

Voorbeeld:

In figuur (V.2.17) geldt (V.2.14) voor $T_{(z_0, y_{+2})}$ en $T_{(z_{+1}, y_{+2})}$.

De rechtstreekse overbrugging is gegeven in respectievelijk

$$([I-A]^{-1}E_2)' \quad (V.2.20)$$

en

$$([I-A]^{-1}E_1)' \quad (V.2.21)$$

De overbrugging in twee stappen, namelijk via y_{+1} , is gegeven in respectievelijk

$$(T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}E_1)' \quad (V.2.22)$$

en

$$(T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_0), \quad (V.2.23)$$

(V.2.15) bevat een overbrugging in twee stappen, omdat het tijdvak van de periode $-s+1$ naar de periode 2 niet in één stap overbrugd kan worden^{*}).

Voorbeeld:

In figuur (V.2.17) geldt (V.2.15) voor $T_{(z_{-1}, y_{+2})}$.

De overbrugging gaat via y_{+1} .

Via verhoging van de tijdsindex met één in (V.2.4) is (V.2.11) verkregen. Daarmee is in (V.2.12) de totale invloed bepaald van z_{+1} op y_{+2} . Via verhoging van de tijdsindex met één in (V.2.12) en via substitutie van (V.2.4) in de verkregen vergelijking voor y_{+3} kan op analoge wijze de totale invloed van z_{+1} op y_{+3} bepaald worden. Daarvoor geldt:

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = [I-A]^{-1} E_0 \quad \text{voor } l = 3 \quad (V.2.24)$$

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = \{ [I-A]^{-1} E_1 + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_0 \} \quad \text{voor } l = 2 \quad (V.2.25)$$

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = \{ [I-A]^{-1} E_{-1+3} + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_{-1+2} + \\ + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} E_{-1+1} \} \quad \text{voor } l = 1, 0, -1, \dots, -s+4, -s+3 \quad (V.2.26)$$

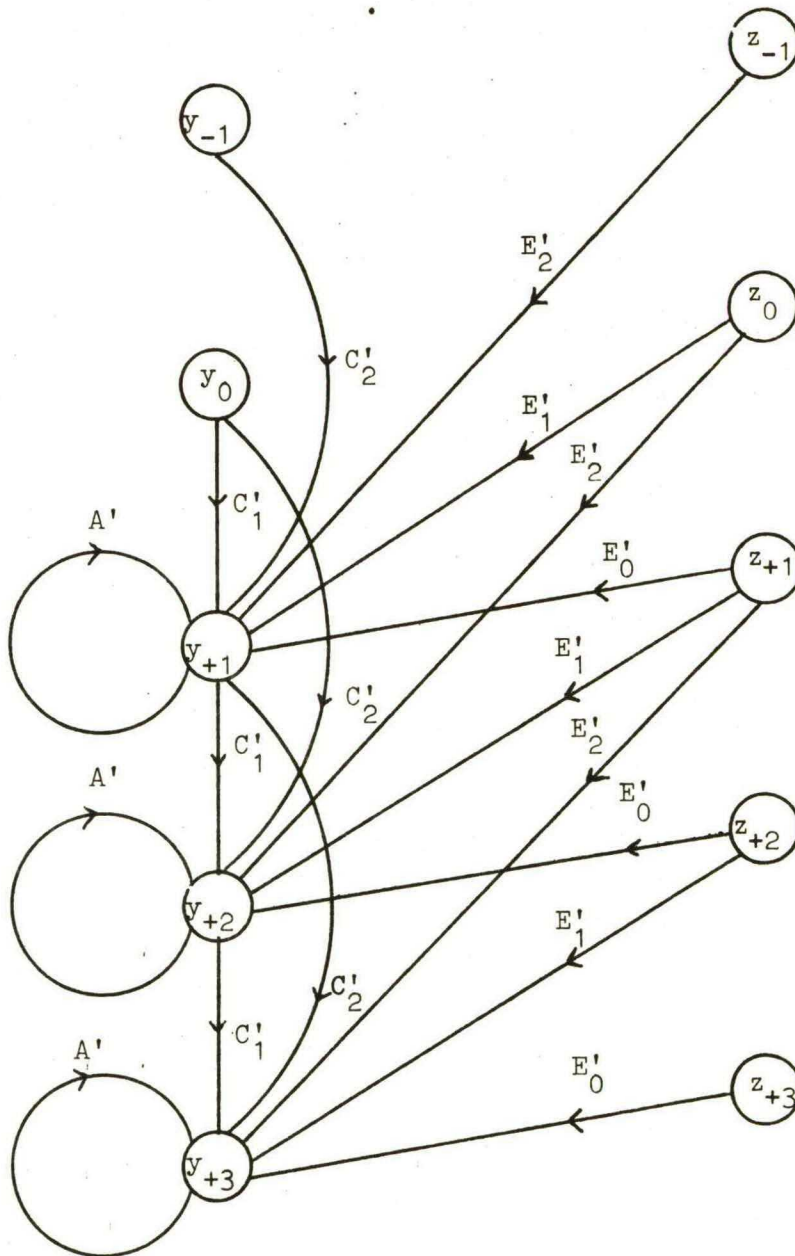
$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = \{ T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_s + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} E_{s-1} \} \quad \text{voor } l = -s+2 \quad (V.2.27)$$

^{*}) $E_{-1} = 0$ voor $-1 > s$. Zie: (V.2.7).

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} E_s \quad \text{voor } l = -s+1 \quad (\text{V.2.28})$$

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = 0 \quad \text{voor } l > 3 \text{ en } l < -s+1 \quad (\text{V.2.29})$$

De formules (V.2.24) tot en met (V.2.29) kunnen toegelicht worden aan de hand van de graaf met horizon drie van model (V.2.3) bij $r = 2$ en $s = 2$:



(V.2.30)

Via berekening van de totale-invloedmatrix van (V.2.30) en na generalisatie voor $r > 2$ en $s > 2$ vindt men dat:

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = (T_{(z_{+1}, y_{+3})})' \quad (V.2.31)$$

De totale invloed van z_{+3} op y_{+3} in (V.2.30) en (V.2.31) is volgens (V.2.24) gelijk aan:

$$T_{(z_{+3}, y_{+3})} = ([I-A]^{-1}E_0)' \quad (V.2.32)$$

Voor de totale invloed van z_{+2} op y_{+3} in (V.2.30) geldt (V.2.25). Die invloed gaat via twee overbruggingen:

a. in twee stappen:

1. van z_{+2} naar y_{+2} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}E_0)' \quad (V.2.33)$$

2. van y_{+2} naar y_{+3} met totale invloed:

$$T_{(y_0, y_{+1})} \quad (V.2.34)$$

b. in een stap, met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}E_1)' \quad (V.2.35)$$

Voor de totale invloed van z_{+1} op y_{+3} in (V.2.30) geldt volgens (V.2.26) en (V.2.31):

$$T_{(z_{+1}, y_{+3})} = ([I-A]^{-1}E_2 + T_{(y_0, y_{+1})}[I-A]^{-1}E_1 + T_{(y_0, y_{+2})}[I-A]^{-1}E_0)' \quad (V.2.36)$$

De invloed van z_{+1} op y_{+3} in (V.2.36) gaat via drie overbruggingen:

a. in twee stappen:

stap 1: van z_{+1} naar y_{+1} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}E_0)' \quad (V.2.37)$$

stap 2: van y_{+1} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+2})})' \quad (V.2.38)$$

b. in twee stappen:

stap 1: van z_{+1} naar y_{+2} met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}E_1)' \quad (V.2.39)$$

stap 2: van y_{+2} naar y_{+3} met totale invloed:

$$(T_{(y_0, y_{+1})})' \quad (V.2.40)$$

c. in een stap met totale invloed:

$$([I-A]^{-1}E_2)' \quad (V.2.41)$$

Voor de totale invloed van z_0 op y_{+3} in (V.2.30) geldt (V.2.27). De twee overbruggingen gaan beide in twee stappen. Er is geen rechtstreekse overbrugging meer mogelijk, omdat

$$E_{-1} = 0 \quad \text{voor } -1 > s \quad (V.2.42)$$

Ook de totale invloed van z_{-1} op y_{+3} in (V.2.30) gaat volgens (V.2.28) via een overbrugging in twee stappen.

Het voorafgaande kan gegeneraliseerd worden voor de bepaling van

$$T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} \quad (V.2.43)$$

Indien $(\kappa-1) \leq s$, kan de periode in een stap overbrugd worden en is de totale invloed via die overbrugging gegeven in:

$$([I-A]^{-1} E_{\kappa-1})' \quad (V.2.44)$$

Indien $1 \leq 1$ moet bij de overbrugging in twee stappen, de eerste stap de periode van z_{-1} naar y_{+1} overbruggen, omdat $y_{+\kappa}$ voor $\kappa < 1$ gegeven is en in het model niet beïnvloed wordt. Hiermee rekening houdend geeft de generalisatie van (V.2.5), (V.2.14) en (V.2.26):

Voor $1 = 1, 0, -1, \dots, -s+2, -s+1$

$$\kappa \geq 1$$

$$\kappa-1 \leq s$$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} = & ([I-A]^{-1} E_{\kappa-1} + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_{\kappa-1-1} + \\ & + T_{(y_0, y_{+2})} [I-A]^{-1} E_{\kappa-1-2} + \\ & \dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})} [I-A]^{-1} E_{z-1} + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} E_{1-1})' \end{aligned} \quad (V.2.45)$$

Indien $1 > 1$, gaat de kleinste stap van de overbrugging van z_{+1} naar y_{+1} . De totale invloed via die stap is gegeven in

$$([I-A]^{-1} E_0)' \quad (V.2.46)$$

Hiermee rekening houdend kan (V.2.13), (V.2.24) en (V.2.25) gegeneraliseerd worden tot:

Voor $l > 1$

$$\kappa > 1$$

$$\kappa-1 \leq s$$

$$1 \leq \kappa$$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} &= ([I-A]^{-1} E_{\kappa-1} + T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_{\kappa-1-1} + \\ &+ T_{(y_0, y_{+1})} [I-A]^{-1} E_{\kappa-1+2} + \\ &\dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-1-1})} [I-A]^{-1} E_1 + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} E_0), \end{aligned}$$

(V.2.47)

Indien $(\kappa-1) > s$, kan de periode niet meer in een stap overbrugt worden.

(V.2.45) gaat dan via generalisatie van (V.2.15), (V.2.27) en (V.2.28) over in:

Voor $l = 1, 0, -1, \dots, -s+2, -s+1$

$$\kappa \geq 1$$

$$\kappa-1 > s$$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} &= (T_{(y_0, y_{+\kappa-1-s})} [I-A]^{-1} E_s + T_{(y_0, y_{+\kappa-1-s+1})} [I-A]^{-1} E_{s-1} + \dots \\ &\dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-2})} [I-A]^{-1} E_{-1+2} + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} E_{-1+1}), \end{aligned}$$

(V.2.48)

Voor $(\kappa-1) > s$ gaat (V.2.47) over in:

Voor $l > 1$

$\kappa > 1$

$\kappa-1 > s$

geldt:

$$\begin{aligned} T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} = & (T_{(y_0, y_{+\kappa-1-s})} [I-A]^{-1} E_{-s} + T_{(y_0, y_{+\kappa-1-s+1})} [I-A]^{-1} E_{s-1} + \\ & \dots + T_{(y_0, y_{+\kappa-1-1})} [I-A]^{-1} E_1 + T_{(y_0, y_{+\kappa-1})} [I-A]^{-1} E_0)' \end{aligned} \quad (\text{V.2.49})$$

Voor $l < -s+1$ en $l > \kappa$ geldt:

$$T_{(z_{+1}, y_{+\kappa})} = 0 \quad (\text{V.2.50})$$

Zoals in het voorafgaande voor $\kappa = 1, 2, 3$ kunnen de elementen van (V.2.45), (V.2.47), (V.2.48) en (V.2.49) voor $\kappa \geq 1$ berekend worden met de formule van Mason (IV.1.9).

De invloed van een exogene variabele loopt via de endogene variabelen naar de endogene variabelen in de toekomst. De invloed van de exogene variabelen neemt af indien (V.1.94) geldt.

Literatuur.

1. Chow, G.C.: Analysis and Control of Dynamic Economic Systems.
1975.
2. Derks, W.: Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van
grafentheorie.
Deel I. Inleiding in de grafentheorie.
in: Reeks "Ter Discussie" 76.031. 1976.
3. Derks, W.: Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van
grafentheorie.
Deel II. Formule van Mason.
in: Reeks "Ter Discussie" 76.032. 1976.
4. Derks, W.: Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van
grafentheorie.
Deel III. De graaf van dynamische modellen met één vertraging.
in: Reeks "Ter Discussie", 76.034. 1976.
5. Derks, W.: Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van
grafentheorie.
Deel IV. Formule van Mason en dynamische modellen met één
vertraging.
in: Reeks "Ter Discussie" 76.035. 1976.
6. Theil, H. and Boot, J.C.G.: The final form of econometric equation systems.
in: Review of the International Statistical Institute.
vol. 30 no. 2. 1962.

In de Reeks ter Discussie zijn verschenen:

1.H.H. Tiggelaar	Spectraalanalyse en stochastische lineaire differentievergelijkingen.	juni '75
2.J.P.C.Kleijnen	De rol van simulatie in de algemene econometrie.	juni '75
3.J.J. Kriens	A stratification procedure for typical auditing problems.	juni '75
4.L.R.J. Westermann	On bounds for Eigenvalues	juni '75
5.W. van Hulst J.Th. van Lieshout	Investment/financial planning with endogenous lifetimes: a heuristic approach to mixed integer programming.	juli '75
6.M.H.C.Paardekooper	Distribution of errors among input and output variables.	augustus '75
7.J.P.C. Kleijnen	Design and analysis of simulation Practical statistical techniques.	augustus '75
8.J. Kriens	Accountantscontrole met behulp van steekproeven.	september '75
9.L.R.J. Westermann	A note on the regula falsi	september '75
10.B.C.J. van Velthoven	Analoge simulatie van economische modellen.	november '75
11.J.P.C. Kleijnen	Het economisch nut van nauwkeurige informatie: simulatie van ondernemingsbeslissingen en informatie.	november '75
12.F.J. Vandamme	Theory change, incompatibility and non-deductibility.	december '75
13.A. van Schaik	De arbeidswaardeleer onderbouwd?	januari '76
14.J.vanLieshout J.Ritzen J.Roemen	Input-ouputanalyse en gelaagde planning.	februari '76
15.J.P.C.Kleijnen	Robustness of multiple ranking procedures: a Monte Carlo experiment illustrating design and analysis techniques.	februari '76
16.J.P.C. Kleijnen	Computers and operations research: a survey.	februari '76
17.J.P.C. Kleijnen	Statistical problems in the simulation of computer systems.	april '76
18.F.J. Vandamme	Towards a more natural deontic logic.	mei '76
19.J.P.C. Kleijnen	Design and analysis of simulation: practical, statistical techniques.	juni '76
20.H.H. Tigelaar	Identifiability in models with lagged variables.	juli '76
21.J.P.C. Kleijnen	Quantile estimation in regenerative simulation: a case study.	augustus '76
22.W.Derks	Inleiding tot econometrische modellen van landen van de E.E.G.	augustus '76
23.B. Diederer Th. Reijs W. Derks	Econometrisch model van België.	september '76
24.J.P.C. Kleijnen	Principles of Economics for computers.	augustus '76
25.B. van Velthoven	Hybriede simulatie van economische modellen.	augustus '76.

26. F. Cole	Forecasting by exponential smoothing, the Box and Jenkins procedure and spectral analysis. A simulation study.	september '76
27. R. Heuts	Some reformulations and extensions in the univariate Box-Jenkins time series analysis.	juli '76
28. W. Derks	Vier econometrische modellen.	
29. J. Frijns	Estimation methods for multivariate dynamic models.	oktober '76
30. P. Meulendijks	Keynesiaanse theorieën van handelsliberalisatie.	oktober '76
31. W. Derks	Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van Grafentheorie. Deel I: inleiding in de Grafentheorie.	september '76
32. W. Derks	Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van Grafentheorie. Deel II: Formule van Mason.	oktober '76
33. A. van Schaik	Een direct verband tussen economische veroudering en bezettingsgraadverliezen.	september '76
34. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische Modellen met behulp van Grafentheorie. Deel III. De graaf van dynamische modellen met één vertraging.	oktober '76
35. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische Modellen met behulp van Grafentheorie. Deel IV. Formule van Mason en dynamische modellen met één vertraging.	oktober '76
36. J. Roemen	De ontwikkeling van de omvangsverdeling in de levensmiddelenindustrie in de D.D.R.	oktober '76

Bibliotheek K. U. Brabant



17 000 00279234 0

26739